Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Série de Fourier d'une fonction paire périodique** (10 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btssp.fr/assets/annales/bts-sp/E2 - Mathématiques/2023/BTS SP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un meuble et le fond de son tiroir est modélisée en fonction du temps pendant la fermeture. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle, puis par l'analyse de fonction, un algorithme de seuil et le calcul d'une position moyenne.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $r + 1 = 0$ ou $r + 4 = 0$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l'aide des solutions de l'équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau fourni donne alors une solution générale comme combinaison des exponentielles associées à ces racines.

On obtient donc deux constantes réelles indépendantes, C_1 et C_2.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales et fermeture

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut 20 cm. Sa dérivée représente la vitesse de déplacement de M par rapport à O, donnée dans l'énoncé comme négative puisque M se rapproche de O.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

À deux secondes, on remplace t par 2 dans l'expression donnée :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

C'est la distance exacte OM à cet instant. Son évaluation numérique est d'environ 3,16 cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}16$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

On évalue la distance à $t = 4$ s :

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427 \text{ cm}.$$

Comme $f(0) = 20$ cm et que f est continue, elle atteint la valeur 0,5 cm avant 4 secondes. Le critère de fermeture est donc satisfait avant cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : $f(4) \approx 0{,}427 < 0{,}5$ cm, donc le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-t \to -\infty$ et $-4t \to -\infty$. Ainsi, $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. La fonction étant une combinaison linéaire de ces deux exponentielles, sa limite est également nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est 0. La courbe représentative se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 0, qui est son asymptote en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, la dérivée du premier terme est $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second terme, les deux signes négatifs donnent $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$. On additionne ces dérivées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant strictement négative sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 0.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de f(t) arrondies au centième et le résultat du test, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Le test utilise la valeur exacte de $f(t)$, tandis que la colonne des valeurs est arrondie au centième. La boucle continue si $f(t) > 0{,}5$, puis s'arrête dès que cette condition devient fausse.

Ligne	t	$f(t)$ **au centième**	**Test**
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, lorsque le test devient FAUX.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Le test reste vrai à $t = 3{,}8$, puis devient faux à $t = 3{,}9$, car la distance est alors inférieure à 0,5 cm. L'algorithme s'arrête donc à cette valeur. Dans le contexte, le tiroir est considéré fermé à cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé, car sa distance est alors inférieure à 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer l'expression de m donnée dans le sujet.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. En appliquant la relation de la position moyenne :

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right).$$

La simplification donne l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

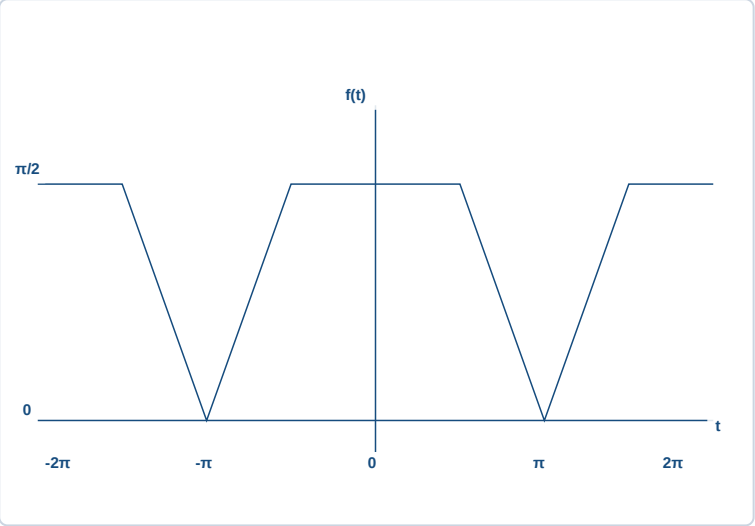
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Il mobilise la représentation graphique, les coefficients de Fourier et une somme partielle, puis demande de comparer une approximation à la valeur efficace au moyen d'un pourcentage d'erreur.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux et sa périodicité.

Sur \,$[-\pi ; \pi]$, la fonction est constante égale à $\pi/2$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, puis forme deux segments qui rejoignent 0 en $\pm\pi$. Répéter ce motif tous les 2π donne le tracé sur $[-2\pi ; 2\pi]$.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé périodique pair, de période 2π, avec des zéros en $\pm\pi$ et un plateau de hauteur $\pi/2$ autour de chaque multiple de 2π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Par périodicité, on peut intégrer sur $[-\pi ; \pi]$. La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire : leur produit est impair. Son intégrale sur cet intervalle symétrique est donc nulle, pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f à partir de sa période.

La pulsation est reliée à la période par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Comme $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a_0 est égal à $3\pi/8$.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. La parité et la période 2π conduisent à $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. En séparant les deux morceaux :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient a_n est égal à la somme des deux intégrales indiquées dans le sujet.

Pour $n \geq 1$, la formule du formulaire et la parité donnent $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $t = \pi/2$, là où change l'expression de f. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, et sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. Ainsi :

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$.

Question 6. À partir de l'expression fournie pour a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

En remplaçant successivement n par 1, 2 et 3 dans la formule fournie, avec $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$, on obtient :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. **Déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ à partir des coefficients obtenus.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque tous les coefficients b_n sont nuls. En y substituant les coefficients déterminés précédemment :

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. **Parmi les trois courbes proposées, indiquer sans justification celle qui est associée à la fonction s_3.**

La somme partielle est paire, périodique et présente un creux au voisinage de $t = \pm\pi$. Parmi les trois tracés proposés, le profil de la courbe numéro 3 correspond à ces caractéristiques.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant les coefficients exacts :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2} \approx 1{,}6437.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Recopier la réponse choisie sans justification.**

Le pourcentage d'erreur relative est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les choix proposés, la réponse la plus proche est $0{,}1\,\%$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme des solutions.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, alors f y est strictement décroissante.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.
- La pulsation d'une fonction périodique est $\omega = 2\pi/T$; une somme partielle de Fourier conserve les premiers harmoniques.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et le signe de la vitesse dans les conditions initiales du mouvement du tiroir.
- Pour l'algorithme, suivre les incréments de 0,1 et distinguer le test de la valeur obtenue après l'incrémentation.
- Dans les calculs de Fourier, exploiter la parité et la période avant de développer les intégrales.
- Pour le pourcentage d'erreur, rapporter l'écart entre P et F^2 à la valeur de référence F^2.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter les données initiales du tiroir ?

La distance initiale donne f(0), exprimée en centimètres. La vitesse initiale correspond à f'(0), car f mesure une distance en fonction du temps ; elle est négative lorsque le point M se rapproche de O.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls pour cette fonction ?

La fonction est paire et le sinus est impair. Leur produit est donc impair sur un intervalle symétrique, et son intégrale sur une période centrée en zéro s'annule. Les coefficients associés aux sinus sont ainsi nuls.

Q : Comment aborder le tableau de l'algorithme et gérer le temps ?

Calculer f(t) aux valeurs successives espacées de 0,1, puis vérifier la condition f(t) > 0,5 jusqu'à son échec. L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points : prévoir du temps pour les deux.

Q : Quelles consignes de présentation des résultats faut-il respecter ?

Donner les valeurs exactes lorsqu'elles sont demandées et respecter l'arrondi précisé pour les valeurs approchées. À la question à choix multiples, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btssp.fr/assets/annales/bts-sp/E2 - Mathématiques/2023/BTS SP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Systèmes Photoniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.